φ' est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\varphi''(x) = f''(x) = \dfrac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}Log2$		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$	-1	↗	a	↘	
		$(-)$			

$$a = \varphi'\left(-\frac{1}{2}Log2\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}Log2}}{(1+e^{-Log2})^{\frac{3}{2}}} - 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}$; $\varphi'(x) < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc φ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par φ ce qui donne que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution α

* d'autre part on a :

$\varphi(Log2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} - Log2 > 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{e}{\sqrt{1+e^2}} - 1 < 0$ donc

$\varphi(Log2).\varphi(1) < 0$ et φ est continue sur $[Log2, 1]$ d'où d'après le théorème des valeurs intérmediaires : $Log2 < \alpha < 1$

2°/ a) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} Log\frac{x^2}{1-x^2}\,dx$